ВВЕДЕНИЕ

Задачи динамики тел, которые имеют полости, содержащие жидкость, в последнее время привлекают большое внимание. Этим задачам посвящено значительное число работ, опубликованных главным образом за последние 15-20 лет. Интерес к задачам динамики тел с полостями, содержащими жидкость, значительно усилился в связи с быстрым развитием ракетной и космической техники. Запас жидкого топлива, имеющийся на борту ракет, спутников и космических кораблей, в ряде случаев может оказывать существенное влияние на движение этих летательных аппаратов. Аналогичные задачи возникают и в теории движения самолета и корабля, а также и в других технических вопросах. Таким образом, задачи динамики тел, которые имеют полости, содержащие жидкость, представляют несомненное прикладное значение. Эти задачи имеют и принципиальный, теоретический интерес.

Задачи динамики тел с полостями, содержащими жидкость, относятся к числу трудных классических задач механики. Их исследование было начато еще в прошлом веке Стоксом [1] и продолжено затем в работах Гельмгольца, Неймана, Ламба [2], и других ученых. В работе Н.Е.Жуковокого [3] была детально разработана теория движения твердого тела с полостью, полностью наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей потенциальное движение. При этих условиях для определения движения жидкости в полости необходимо решить три стационарные краевые задачи, зависящие лишь от формы полости. Определив решения этих задач, называемые потенциалами Жуковского, можно путем вычисления определенных интегралов найти для данной полости компоненты тензора присоединенных масс. Движение тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью при потенциальном движении, оказывается эквивалентным движению твердого тела, тензор инерции которого складывается из тензора инерции исходного твердого тела и тензора присоединенных масс для данной полости. Задача динамики тела с жидкостью, таким образом, здесь разделяется на две части. Первая часть задачи, зависящая лишь от формы полости, сводится к решению трех краевых задач и к расчету тензора присоединенных масс. Вторая часть задачи - это обычная задача динамики твердого тела, приводящаяся к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе Н.Е.Жуковского [3] проведено вычисление потенциалов и присоединенных масс для большого числа различных форм полостей. Вопросы устойчивости движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость, также издавна привлекали внимание исследователей. Еще в опытах Кельвина было обнаружено, что вращение волчка будет устойчиво, если, полость сжата в направлении оси вращения, и неустойчиво - в противном случае. В работах Гринхилла, Хафа [4], Пуанкаре [5] и других проводилось теоретическое исследование этой задачи. Авторы этих работ рассматривали движение твердого тела с полостью эллипсоидальной формы, заполненной идеальной жидкостью. Движение жидкости в полости предполагалось вихревым, но не произвольным, а некоторого специального вида (однородные вихревые движения), который возможен внутри эллипсоидальной полости. В работе Хафа [4] получено и исследовано характеристическое уравнение для малых колебаний твердого тела с жидкостью вблизи равномерного вращения, причем полость представляет собой произвольный эллипсоид, а жидкость внутри нее идеальна и совершает однородное вихревое движение. В работе Пуанкаре [5] учитывалась также неоднородность жидкости и упругость стенок. В работе С.Л.Соболева [6] рассматривалось движение тяжелого симметричного волчка с полостью, заполненной идеальной жидкостью. Уравнения движения линеаризовались около равномерного вращения волчка. С.Л.Соболев установил некоторые общие свойства движения, в частности, некоторые условия устойчивости. Кроме того, в работе [6] подробно рассмотрены два частных случая полостей; эллипсоид вращения и круговой цилиндр. Та же задача, что и в работе [6], была рассмотрена другим методом в работе А.Ю.Ишлинского и М.Е.Темченко [7]. Результаты экспериментальных исследований этой задачи изложены в статье С.В.Малашенко и М.Е.Темченко [8]. Недавно появилась работа [9], где рассматривается устойчивость волчка с жидкостью, вращающегося на струне. Некоторые вопросы устойчивости движения волчка о жидкостью рассмотрены в работе [10] . В работе Стюартсона[11] исследована устойчивость тяжелого волчка с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью.

Задачи о движении волчка с полостью, содержащей жидкость, связаны с исследованием уравнений движения вращающейся жидкости. Эти уравнения, как установил еще Пуанкаре, обладают некоторыми специфическими особенностями, отличающими их от обычных уравнений математической физики. Задача Коши для линеаризованных уравнений вращающейся идеальной жидкости исследована в работе С.Л.Соболева [12] . Различные математические вопросы, связанные с уравнениями вращающейся жидкости, рассматривались в работах Р.А.Александряна [13] , С.Г.Крейна [14] и других авторов.

Изучение устойчивости движения твердых тел с полостями, содержащими жидкость, обычно проводится одним из двух способов. Первый способ основан на линеаризации уравнений Движения и на исследовании полученной линейной задачи. Этот способ использован в ряде перечисленных выше, работ, а также во многих других. Другой способ основан на применении и развитии второго метода Ляпунова. К этому направлению относятся работа Н.Г.Четаева [15], цикл работ В.В.Румянцева (например, работы [16-23]), работы Г.К.Пожарицкого [20,24], С.В.Жака [25], Н.Н.Колесникова [26] и другие. В этих работах получен ряд результатов об устойчивости движения твердых тел с полостями, полностью или частично заполненных жидкостью. Рассматривался как случай идеальной, так и случай вязкой жидкости, а также влияние сил поверхностного натяжения (например, в работе [22]). Эти результаты изложены также в обзорной статье [21] и в монографии [27]. Отметим, в частности, что В.В.Румянцевым были получены достаточные условия устойчивости движения тяжелого твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. Эти условий согласуются с результатами С.Л.Соболева [6]. В частности, при вращении свободного твердого тела с жидкостью вокруг его центра инерции для устойчивости движения достаточно, чтобы ось вращения была осью наибольшего центрального момента инерции всей системы [27]. Этот результат дополняет теорему, приведенную ранее в работе Н.Е.Жуковского [3].

Большое число работ в последние годы посвящено динамике твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью. Эти задачи имеют важное значение для приложений. Помимо вопросов устойчивости, здесь представляет интерес изучение совместных колебаний жидкости и тела с жидкостью, разработка эффективных численных методов расчета движения таких систем. Эти задачи рассматривались, главным образом, в линейной постановке. Некоторые задачи о колебаниях тела с полостью, содержащей идеальную жидкость, рассмотрены в работе Л.Н.Сретенского [28]. Общая задача о колебаниях тела с полостью, частично наполненной идеальной жидкостью, была исследована в ряде работ Н.Н.Моисеева (например, в работах [29-32]), Д.Е.Охопдмского [33], Г.С.Нариманова [34], Б.И.Рабиновича [35], С.Г.Крейна и Н.Н. Моисеева [36] и других. Оказалось, что для описания малых колебаний тела с полостью, частично наполненной тяжелой идеальной жидкостью, требуется, кроме определения потенциалов Жуковского, решить еще задачу на собственные значения. Эта задача, зависящая лишь от формы полости, представляет собой задачу о собственных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде. Определив потенциалы Жуковского и собственные колебания жидкости, можно найти коэффициенты, характеризующие взаимное влияние тела и жидкости в полости при колебаниях. Движение всей системы может быть описано счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых определяются указанным выше образом. Таким образом, задача и здесь разбивается на две части.

Первая часть задачи, зависящая лишь от формы полости, сводится к решению некоторых краевых задач и задач на собственные значения для линейных уравнений с частными производными, а затем к расчету гидродинамических коэффициентов. Эта задача может быть решена аналитически лишь для небольшого числа форм полостей. В случае сложных форм полостей для ее решения применяются различные численные и приближенные методы. Этим вопросам посвящено большое число работ. Отметим, помимо указанных выше работ, сборник статей [37], работу [38], книгу [39], в которых имеются как методические указания, так и данные расчетов для ряда конкретных полостей. В этих работах можно найти также и библиографию по этому вопросу.

Вторая часть задачи при изучении колебаний тела с полостью, содержащей идеальную жидкость,— это исследование и решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В практических задачах обычно можно ограничиться учетом лишь нескольких главных форм колебаний жидкости, поэтому число уравнений, соответствующих жидкости, оказывается небольшим. Эта задача может решаться численно.

В случае, когда колебания жидкости в сосуде нельзя считать малыми, задача значительно усложняется и становится нелинейной. Некоторые нелинейные задачи о движении жидкости со свободной поверхностью внутри полости твердого тела рассматривались, например, в работах [40, 41].

Важное значение при исследовании колебаний тела с жидкостью имеют экспериментальные исследования. В работе [42] исследованы свободные колебания жидкости в сосуде, причем произведены измерения влияния вязкости и поверхностного натяжения на колебания. Работа [43] посвящена экспериментальному изучению колебаний тела с жидкостью. Обзор как теоретических, так и экспериментальных работ в этой области дан в статье [44], где имеется обширная библиография.

Задачи динамики твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость, представляют значительно большие трудности, чем в случае идеальной жидкости. Исследованию этих задач посвящено сравнительно небольшое число работ. Главным образом, в этих работах рассматриваются либо вопросы устойчивости (эти работы упоминались выше), либо изучаются частные случаи движения тел с полостями специального вида.

Некоторые приближенные решения задач о движении вязкой жидкости во вращающейся полости содержатся в работе [3], в книге [45]. В работе Б.Н.Румянцева [46] рассмотрены некоторые задачи о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса (большая вязкость). При этом используются известные решения линеаризованных уравнений гидродинамики для полостей в форме бесконечного цилиндра и сферы.

В случае малой вязкости жидкости (большие числа Рейнольдса) испытанным приемом решения уравнений гидродинамики является метод пограничного слоя (см., например [47,48]). Математическое обоснование этого метода для некоторых линейных краевых задач было дано М.И.Вишиком и Л.А.Люстерником [49].В работе Н.Н.Моисеева [50] предложен вариант метода пограничного слоя для исследования малых колебаний вязкой жидкости. Этот метод был использован П.С.Краснощековым [51], рассмотревшим задачу о малых плоских колебаниях маятника с осесимметричной полостью, заполненной маловязкой жид костью. Несколько более общая задача рассмотрена в работе [52] , где приводится также одна теорема, обосновывающая метод пограничного слоя для некоторых задач о колебаниях тела с жидкостью.

Применению метода, предложенного в работе [50], к различным задачам о колебаниях вязкой жидкости, имеющей свободную поверхность, посвящены работы Н.Я.Багаевой и Н.Н.Моисеева [53], А.Г.Шмидта [54], С.И.Крушинской [55] .

Отметим, что та же задача, что и в работе [55], рассматривалась ранее В.В.Болотиным [56], но при феноменологическом учете вязкости жидкости. В работе Е.Д.Викторова [57] приближенно вычислены декременты затухания свободных колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде.

Некоторые общие теоремы о свойствах собственных колебаний тяжелой вязкой жидкости в сосудах установлены С.Г.Крейном [58] при помощи методов функционального анализа.

В работах О.Б.Иевлевой [59, 60] рассмотрены некоторые задачи о движении твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. Благодаря специальной форме полости, решения удается выразить через обобщенные сферические функции.

Ряд работ был посвящен движению вязкой жидкости в полости вращающихся твердых тел. Сюда относятся работы Стюартсона и Робертса [61], Гринспэна и Ховарда [62], Гринспэна [63, 64], Стюартсона [65] и другие.

В этих работах движение твердых тел предполагается заданным: это либо равномерное вращение (в работах [62-65]), либо регулярная прецессия [61]. При анализе движения жидкости в полости в этих работах широко применяется метод пограничного слоя. В статье [63] для одной задачи о движении жидкости в полости вращающегося твердого тела отмечается совпадение результатов расчетов по методу пограничного слоя с данными экспериментов. В статьях [66,67] дан обзор работ по динамике вращающейся жидкости.

В последние годы появились работы по динамике тела с жидкостью, в которых учитываются силы поверхностного натяжения. Эти силы существенно влияют на равновесие и движение жидкости в случае, когда массовые силы малы, что имеет место в условиях, близких к условиям невесомости. Поэтому задачи динамики жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, представляют прикладной интерес в связи с некоторыми вопросами космической техники. Некоторые задачи равновесия и движения жидкости в сосудах при наличии сил поверхностного натяжения рассмотрены, например, в книге [27] и в работах [68—75].В частности, колебания идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, рассматривались в работе [70], колебания вязкой жидкости - в работе [75]. Работа [71] посвящена динамике твердого тела с полостью, в которой находится идеальная жидкость и небольшой пузырь воздуха. С помощью альтернирующего метода Шварца показано, что движение этой системы может быть при некоторых предположениях описано обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Приведенный выше краткий обзор работ по динамике тел с полостями, содержащими жидкость, не претендует на полноту. В частности, в нем не упоминаются работы, посвященные колебаниям жидкости в полости с упругими стенками. Более полные обзоры, а также обширная библиография работ имеется в книгах [27, 37, 39] и в обзорных статьях [21, 44, 66].

Как видно из приведенного обзора, в настоящее время для задачи о движении твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость, разработаны в ряде случаев как общая теория, так и эффективные методы расчета. Это относится к случаю потенциального движения жидкости, которая либо целиком заполняет полость (см. [3]), либо имеет свободную поверхность, но совершает малые колебания (см. [27-39]).

Вопросы движения тел с полостями, содержащими вязкую жидкость, изучены значительно меньше. Между тем эти задачи представляют интерес и имеют приложения, в частности, в динамике космических и других летательных аппаратов. Такие задачи возникают в связи с расчетом движения аппаратов относительно центра масс, в вопросах ориентации и стабилизации космических аппаратов. Например, представляет интерес разработка способов вычисления демпфирующего действия, оказываемого вязкой жидкостью в полости на движение твердого тела. Отметим, что влияние вязкости жидкости в некоторых задачах оказывается довольно тонким: она может приводить как к стабилизации движения твердого тела, так и, наоборот, к потере им устойчивости.

В принципе возможен, вообще говоря, целиком численный подход к решению задач динамики тел с полостями, содержащими жидкость. При таком подходе потребуется,

параллельно с интегрированием уравнений движения твердого тела, решать краевую задачу для уравнений Навье — Стокса, описывающих движение жидкости. Но такой путь решения будет чрезвычайно трудоемким и едва ли практически осуществим, если необходимо провести серию расчетов и оценить влияние различных параметров. Кроме того, следует иметь в виду, что с прикладной точки зрения наибольший интерес представляют главным образом не детали движения жидкости в полости, а интегральные характеристики ее движения и влияние жидкости на динамику твердого тела. Поэтому представляет интерес разработка эффективных приближенных способов анализа и расчета движения тела с жидкостью.

Данная монография посвящена исследованию движения твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. Для некоторых классов движения тела с жидкостью показано, что гидродинамическая часть задачи может быть, в определенном .смысле, отделена от задачи динамики твердого тела и сведена к определению функций, зависящих от формы полости. Влияние жидкости на движение твердого тела характеризуется некоторыми величинами (коэффициентами), зависящими от формы полости. Эти коэффициенты выражаются только через указанные функции.

Таким образом, как показано в монографии, решение задач динамики тела с жидкостью в рассмотренных случаях разбивается на две части, которые могут выполняться независимо. Первая, гидродинамическая часть задачи сводится к решению некоторых стандартных краевых задач, зависящих от формы полости и не зависящих от движения тела, и затем к расчету коэффициентов, характеризующих влияние жидкости на движение тела. Вторая, динамическая часть задачи, сводится к решению уравнений движения тела и не требует решения уравнений с частными производными. Такое разбиение позволяет существенно упростить исходную задачу. В значительной степени, ход решения оказывается подобным тому, который имеет место для идеальной жидкости. Полученные в книге результаты могут служить для анализа и расчета различных конкретных задач динамики твердых тел с полостями, содержащими жидкость.

Монография содержит четыре главы, каждая из которых посвящена одному из рассматриваемых классов движения твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. В каждый главе для соответствующего случая проводится при помощи асимптотических методов общий анализ движения и устанавливается схема решения данного класса задач динамики тела с жидкостью. Затем рассматриваются некоторые конкретные формы полостей, для которых проведены все вычисления. Далее в каждой главе на основе общих уравнений, полученных для данного класса движений, исследуются различные конкретные задачи динамики твердых тел с полостями, содержащими вязкую жидкость. Рассмотрены как колебательные, так и вращательные движения, приводятся примеры.

Изложим краткое содержание книги.

В первой главе рассматривается движение твердого тела с полостью, целиком наполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Основным допущением является предположение о малости числа Рейнольдса:

$R = l^2 T^{-1} \nu^{-1} \ll 1$. Здесь l — характерный линейный размер полости; — характерный масштаб времени относительного движения, обратно пропорциональный характерной угловой скорости ω; а ν — кинематическая вязкость жидкости. Не нарушая общности, примем l и за единицы измерения длины и времени. Тогда вязкость ν будет большим параметром, т.е. $\nu = l/R \gg 1$. Скорость $\bar{u}$ жидкости в системе координат, связанной с твердым телом, ищем в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{w} + \bar{W}; \bar{w}(\bar{r}, t) = \bar{w}^0(\bar{r}, t) + \nu^{-1}\bar{w}^1(\bar{r}, t) + \nu^{-2}...; \\ \bar{W}(\bar{r}, t) &= \bar{W}^0(\bar{r}, t) + \nu^{-1}\bar{W}^1(\bar{r}, t) + \nu^{-2}...(\tau = \nu t) \end{aligned} \tag{1}$$

Давление ищется в виде аналогичных рядов. Здесь $\bar{r}$ — радиус-вектор, отсчитанный от некоторой точки, связанной с твердым телом; t — время; $\tau = \nu t$ — быстрое время, а верхние индексы указывают номер приближения. Подставляя ряды вида (1) в уравнения Навье - Стокса, получаем краевые задачи для определения коэффициентов этих рядов. Рассмотрение показывает, что тождественно $W^0 = 0$ и всюду, за исключением малого начального интервала времени, можно принять $\bar{u} = v^{-1}\bar{w}^1 + O(\nu^{-2})$. Определение функции $\bar{w}^1(\bar{r}, t)$ сводится к решению трех стационарных линейных краевых задач

$$\Delta \bar{z}_i = \nabla s_i + \bar{e}_i \times \bar{r}; \quad \mathrm{div} = 0 \text{ в } D; \quad \bar{z}_i = 0 \text{ на } S \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Здесь $\bar{e}_i$ — орты осей координат; D — область полости, S — ее граница, $\bar{z}_i$ и S_i — искомые функции, зависящие лишь от формы полости. Через эти функции выражаются скорость и давление жидкости. Кинетический момент $\bar{K}$ тела с жидкостью относительно центра инерции системы представляется в виде

$$\bar{K} = \bar{J} \cdot \bar{\omega} - \frac{\rho}{\nu}\bar{P} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt}; \quad P_{ij} = -\int\limits_D \bar{e}_j \cdot (\bar{r} \times \bar{z}_i) dv, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Здесь $\bar{J}$ — тензор инерции системы относительно центра инерции; $\bar{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости твердого тела; ρ — плотность жидкости; точкой обозначается скалярное произведение тензора на вектор. Постоянный тензор $\bar{P}$ зависит лишь от формы полости и характеризует диссипацию энергии за счет вязкости жидкости, P_{ij} — его компоненты в системе координат, связанной с телом. В работе показывается, что тензор $\bar{P}$ симметричен и соответствует положительно-определенной квадратичной форме. Этот тензор может быть заранее подсчитан для ряда форм полостей. Для некоторых конкретных форм полостей (сфера, эллипсоид, цилиндр и другие) в первой главе дано решение краевых задач (2) и вычислены компоненты тензора $\bar{P}$.

При помощи формулы (3) для кинетического момента выводится система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая, при сделанных предположениях, описывает движение твердого тела с жидкостью. Эта система выписана для общего случая, причем влияние жидкости на движение тела характеризуется тензором $\bar{P}$, для определения которого нужно решить краевые задачи (2).

Ход решения, таким образом, оказывается аналогичным решению задачи о движении твердого тела с полостью, наполненной идеальной жидкостью, при потенциальном движении [3].

Далее в первой главе рассматривается и упрощается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая движение тела с жидкостью. Эта система содержит малый параметр ν^{-1}, и для ее решения в ряде случаев можно использовать асимптотические методы.

На основе полученных уравнений рассмотрены некоторые конкретные задачи. Изучено в нелинейной постановке плоское движение маятника с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Получен закон затухания нелинейных колебаний и вращений маятника.

Рассмотрена также задача о пространственном движении свободного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Известно, что устойчивым движением системы относительно ее центра инерции в этом случае является равномерное вращение вокруг оси наибольшего момента инерции [27]. В первой главе получено количественное описание всего переходного процесса, приводящего к устойчивому движению, найдено время переходного процесса.

Кроме этого, в первой главе рассмотрено движение системы, состоящей из твердого тела со сферической полостью, в которой находится другое твердое тело сферической формы (демпфер). Между сферой и стенками полости имеется узкий зазор, в котором действуют вязкие силы (смазочный слой). Эта система с конечным числом степеней свободы, которую мы будем называть твердым телом с демпфером, была предложена М.А.Лаврентьевым как модель для описания движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью (см. статью [76]). В первой главе показано, что в случае большой вязкости смазки движение твердого тела с демпфером может быть описано теми же уравнениями, что и движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью большой вязкости. Установлены соотношения между параметрами систем, при выполнении которых обе системы (тело с жидкостью и тело с демпферами) будут механически эквивалентными .

Определены стационарные движения свободного твердого тела с демпфером. Путем анализа характеристического уравнения найдены необходимые условия устойчивости этих движений, а при помощи метода Ляпунова получены и достаточные условия устойчивости. Эти условия аналогичны тем, которые имеют место для тела с жидкостью.

Вторая глава посвящена движению твердого тела с полостью, целиком заполненной мало вязкой несжимаемой жидкостью. Число Рейнольдса R здесь предполагается большим: $R \gg 1$. За счет выбора единиц измерения длины и времени вязкость жидкости ν можно считать малым параметром: $\nu \ll 1$. Кроме того, амплитуда движения тела и жидкости предполагается малой, т.е. задача рассматривается в линейной постановке, форма полости считается произвольной. Для решения линеаризованных уравнений Навье - Стокса применяется метод пограничного слоя. Так скорость жидкости ищется в виде суммы $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$, причем первое слагаемое $\bar{v}$ разлагается в ряд по степеням параметра $\sqrt{\nu}$, а второе слагаемое $\bar{w}$ есть функция типа пограничного слоя, быстро затухающая при удалении от стенок полости. Движение жидкости вдали от стенок близко к потенциальному движению.

Известно, что в случае идеальной жидкости для решения задачи нужно определить потенциалы Жуковского для данной полости [3]. Во второй главе показано, что через эти потенциалы выражается решение также и в случае мало вязкой жидкости. Так, получены общие формулы, определяющие решение в пограничном слое $\bar{w}$ через эти потенциалы. Кинетический момент $\bar{K}$ всей системы в ее движении относительно точки 0, связанной с телом, выражается при определенных предположениях в виде

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \bar{I} \cdot \bar{\omega} + \frac{\rho\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} \bar{E} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\bar{\omega}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}; \qquad (4) \\ E_{ij} &= \oint\limits_{S} (\bar{r} \times \bar{e}_i + \nabla\Phi_i) \cdot (\bar{r} \times \bar{e}_j + \nabla\Phi_j) ds, \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{I}$ — тензор инерции эквивалентного твердого тела, т.е. тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью при потенциальном движении; $\bar{\omega}$ — угловая скорость тела; ρ — плотность жидкости; t_0 — начальный момент времени; $\bar{r}$ — радиус-вектор, отсчитанный от точки 0; S — поверхность стенок полости. Постоянный тензор $\bar{E}$, аналогично тензору $\bar{P}$ в первой главе (см. формулу (3)), характеризует диссипацию энергии за счет вязкости жидкости. Через E_{ij} обозначены его компоненты в системе координат, связанной с телом; $\bar{e}_i$ — орты этой системы координат; Φ_i — соответствующие потенциалы Жуковского.

Тензор $\bar{E}$ зависит лишь от формы полости, и для его вычисления достаточно определить лишь потенциалы Жуковского, которые необходимы также для подсчета тензора присоединенных масс, входящего в тензор $\bar{I}$. Тензор $\bar{E}$ симметричен и соответствует положительно—определенной квадратичной форме. Поскольку потенциалы Жуковского известны для широкого класса форм полостей, то тензор $\bar{E}$ может быть заранее рассчитан для многих полостей.

Во второй главе проводится вычисление тензора $\bar{E}$ для некоторых форм полостей: сфера, эллипсоид, цилиндр.

При помощи формулы (4), при сделанных предположениях, составляются общие уравнения движения тела с жидкостью. Эти уравнения являются интегро-дифференциальными, и для их решения могут применяться различные аналитические и численные методы.

Отдельно рассматривается важный случай, когда угловая скорость тела зависит от времени посредством множителя $e^{\delta t}$, где δ — комплексное число. В этом случае, вместо интегро-дифференциальных уравнений, получаются алгебраические уравнения.

Далее во второй главе полученные уравнения применяются для исследования малых колебаний твердого тела с полостью, наполненной вязкой жидкостью. Форма полости и число степеней свободы твердого тела предполагаются произвольными, колебания изучаются в линейной постановке. Рассмотрены как свободные колебания под действием консервативных внешних моментов, так и вынужденные колебания. При этом параллельно рассматриваются два случая: большой и малой вязкости жидкости, для чего используются общие уравнения, выведенные в первой и второй главах. Первый случай описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а второй - интегро—дифференциальными уравнениями, для решения которых применяется операционный метод. Вычислены коэффициенты затухания свободных колебаний тела за счет вязкости жидкости, найдены амплитуды свободных и вынужденных колебаний тела, построены решения задач Коши. Разобраны некоторые примеры. В частности, рассмотрены относительные колебания спутника, содержащего жидкость и движущегося по круговой орбите.

В конце второй главы полученные асимптотические решения для случаев большой и малой вязкости сравниваются с точным решением для бесконечной цилиндрической полости, причем отмечается совпадение результатов.

В третьей главе изучается движение твердого тела с полостью, частично заполненной несжимаемой вязкой жидкостью, имеющей свободную поверхность. Вязкость предполагается малой. Задача рассматривается в линейной постановке: колебания твердого тела относительно центра инерции и колебания жидкости в полости считаются малыми. Форма полости по—прежнему предполагается произвольной.

В начале третьей главы рассматривается более частная задача: свободные колебания мало вязкой тяжелой жидкости в неподвижном сосуде. При помощи метода пограничного слоя получены выражения для собственных чисел и собственных функций задачи о колебаниях вязкой жидкости в произвольном сосуде. Выражения для собственных чисел имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \pm i\omega_m - \frac{(1 \pm i)\nu^{1/2} g}{2\sqrt{2}\omega_m^{3/2}} A_m; \\ A_m &= \left[\int\limits_S (\nabla\Phi_m)^2 ds\right] \Big/ \left[\int\limits_\sigma \nabla\Phi_m^2 ds\right], \quad (m = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ω_m и Φ_m — собственные частоты и собственные функции задачи о свободных колебаниях тяжелой идеальной жидкости в сосуде данной формы. Через ν по-прежнему обозначена кинематическая вязкость жидкости; S — смоченная поверхность стенок сосуда; Σ — невозмущенная свободная поверхность жидкости; g — постоянное ускорение силы тяжести, формула (5) выражает коэффициент затухания свободных колебаний и поправку к частоте, обусловленные вязкостью жидкости. Для расчетов по формуле (5) требуется лишь решить задачу на собственные значения для свободных колебаний идеальной жидкости. Эти задачи решены для многих форм полостей (см., например, [37-39]), Для ряда форм сосудов в третьей главе проведены вычисления по формуле (5) . Результаты сравниваются с результатами, полученными ранее другими авторами для специальных форм сосудов. Здесь же выясняется характер движения вязкой жидкости вблизи линии контакта свободной поверхности со стенками сосуда. Получены асимптотические решения для движения жидкости в этой области в случае малых колебаний при любом числе Рейнольдса.

Далее в третьей главе рассматриваются совместные малые колебания жидкости и тела с жидкостью при допущениях, оговоренных выше. В качестве исходного приближение используется решение задачи о колебаниях тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью. Учет вязкости производится по методу пограничного слоя. При сделанных предположениях выведены общие уравнения динамики тела с полостью произвольной формы, частично заполненной мало вязкой жидкостью. Коэффициенты этих интегро-дифференциальных уравнений зависят лишь от решения задачи о колебаниях тела с идеальной жидкостью в полости данной формы. Так как в случае идеальной жидкости соответствующие задачи решены для многих форм полостей, то определение указанных коэффициентов сводится к вычислению квадратур аналогичных тем, которые фигурируют в формулах (4) и (5). При отсутствии вязкости полученные общие уравнения переходят в известные уравнения для тела с идеальной жидкостью, а при отсутствии свободной поверхности - в уравнения второй главы.

В том случае, когда зависимость всех величии от времени характеризуется множителем $e^{\mu t}$, где μ — комплексное число, полученные уравнения упрощаются. Рассмотрены некоторые задачи о малых колебаниях твердого тела с полостью, частично заполненной маловязкой жидкостью. Для простоты разбирается случай поступательных колебаний тела с жидкостью, так как здесь уже проявляются характерные механические свойства системы, обусловленные вязкостью и наличием свободной поверхности. Получены формулы для собственных частот и коэффициентов затухания свободных колебаний тела с жидкостью. Вычислены амплитуды вынужденных колебаний жидкости и тела с жидкостью. Все рассмотрение проводится для полости произвольной формы, а затем рассмотрены некоторые конкретные формы полостей, для которых выполнены все вычисления.

В четвертой главе движение твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, рассмотрено при следующих предположениях, форма полости и распределение масс в твердом теле, как и выше, предполагаются произвольными. Жидкость считается идеальной или маловязкой, полость целиком заполнена жидкостью. Однако в отличие от второй главы, рассматриваются не колебательные, а вращательные движения тела. Движение тела с жидкостью предполагается близким к равномерному вращению вокруг оси. Уравнения Навье - Стокса линеаризуются около равномерного вращения, и поэтому, в отличие от второй главы, рассматриваемые в четвертой главе движения являются существенно вихревыми.

Доказывается одно свойство собственных колебаний вращающейся вязкой жидкости (при любой вязкости) в полости: вещественная часть всех собственных чисел ограничена сверху отрицательным числом.

Вводятся в рассмотрение специальные решения линеаризованных уравнений вихревого движения идеальной жидкости. Эти решения, зависящие от формы полости, аналогичны потенциалам Жуковского для случая безвихревого движения. Показано, что через эти решения посредством некоторых тензоров выражается кинетический момент системы как в случае идеальной, так и в случае маловязкой жидкости. Последний случай рассматривается методом пограничного слоя. Введенные тензоры аналогичны тензору присоединенных масс и тензору $\bar{E}$, рассмотренному во второй главе (см. формулу (4)), и переходят в них при отсутствии вращения. Эти тензоры характеризуют влияние жидкости в полости на движение твердого тела.

Для эллипсоидальной и сферической полостей определены упомянутые выше специальные решения уравнений вихревого движения и вычислены компоненты указанных тензоров.

Далее в четвертой главе рассмотрены некоторые задачи динамики вращательных движений тела с жидкостью. Составлено характеристическое уравнение для колебаний свободного вращающегося твердого тела с полостью, наполненной идеальной или вязкой жидкостью. В случае, когда масса жидкости мала по сравнению с массой тела, приводится решение этого уравнения при произвольной форме полости. В решение входят компоненты описанных выше тензоров.

Для случая эллипсоидальной полости, заполненной идеальной жидкостью, полученное характеристическое уравнение переходит в уравнения, выведенные ранее в работах [4, 6, 7].

Подробно рассмотрено решение характеристического уравнения для свободных колебаний вращающегося твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. Случай сферической полости интересен тем, что при отсутствии вязкости внутренние движения жидкости не влияют на движение тела. При наличии вязкости вращение тела будет устойчивым лишь в том случае, когда ось вращении есть ось наибольшего момента инерции системы. Этот результат согласуется с результатами, полученными ранее другими способами (см., например [27]). В четвертой главе не только исследуется устойчивость„ но и вычисляются корни характеристического уравнения, что дает возможность судить о скорости затухания или нарастания колебаний. Эта же задача выше, в первой главе, была решена для случая жидкости большой вязкости.

Полученные в монографии результаты могут служить для анализа и расчета различных конкретных задач динамики твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Так, результаты первой, второй и четвертой, глав применимы для исследования колебаний и вращений спутников и космических станций с полостями, заполненными жидкостью, а результаты третьей главы - для исследования колебаний ракеты с жидким топливом на активном участке траектории.

В каждой главе изложение ведется в значительной степени независимо от других глав. Вводимые обозначения заново определяются в каждой главе.

Монография основана на результатах работ автора, которые докладывались на различных научных съездах и семинарах (например, [77-80])и опубликованы в статьях [81-88].

ЛИТЕРАТУРА

1. Stokes G. Mathematical and Physical Papers, vol. I.Cambridge, 1880.

2. Ламб Г. Гидродинамика.— М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

3. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Избранные сочинения, т. 1. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948, с. 31-152.

4. Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London. A., 1895, vol. 186, part 1, p. 469-506.

5. Poincare H. Sur la precession des corps deformables. Bulletin astronomique, 1910, t. 27, p. 321 - 356.

6. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1960, №3, с. 20-55.

7. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1960, №3, с. 65-75.

8. Малашенко С.В., Темченко М.Е. Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1960, №3, с. 76-80.

9. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. Об устойчивости вращения на струне твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 30-41.

10. Вахания Н.Н. Об устойчивости угловой скорости собственного вращения волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПММ, 1865, т. 29, вып. 1, с. 35-45.

11. Stewartson K. On the stability of a spinning top containing liquid. Journal of fluid mechanics , 1959, vol. 5, part 4, p. 577-592.

12. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики. Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, т. 18, №1, с. 3-50.

13. Александрян Р.А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л.Соболева. Труды Московского математического общества. 1960, т. 9, с. 455-505.

14. Крейн С.Г. Дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве и их приложения в гидромеханике. УМН, 1957, т. 12, вып. 1, с. 208-211.

15. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2, с. 157-168.

16. Румянцев В.В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, с. 740-748.

17. Румянцев В.В. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6, с. 1057-1065.

18. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, с. 603-609.

19. Румянцев В.В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с.

877-991.

20. Пожарицкий Г. К., Румянцев В.В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 16-26.

21. Румянцев В.В. Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1963, №6, с. 119-140.

22. Румянцев В.В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. ПММ, 1964. т. 28, вып. 4, с. 746-753.

23. Румянцев В.В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 51-66.

24. Пожарицкий Р.К. О влиянии вязкости на устойчивость равновесия и стационарных вращений твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 60-68.

25. Жак С. В. Об устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа, содержащего жидкие массы. ПММ 1958, т. 22, с. 245-249.

26. Колесников Н.Н. Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 606-612.

27. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.

28. Сретенский Л.Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1951, №10, с. 1483-1494.

29. Моисеев Н.Н. Задача о малых колебаниях открытого сосуда с жидкостью . под действием упругой силы. Укр. матем. жур.8 1952, т. 4, №2, с. 168-173.

30. Моисеев Н.Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью. ДАН СССР, 1952, т. 85, №4, с. 719-722.

31. Моисеев Н.Н. О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде. ДАН СССР, 1952, т. 85, №5, с. 963-965.

32. Моисеев Н.Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность, Математический сборник, 1953, т. 32, вып. 1, с. 61-96.

33. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 3-20.

34. Нариманов Г.С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 21-38.

35. Рабинович Б. И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. ПММ. 1956. т. 20, выл. 1, с. 39-50.

36. Крейн С.Г., Моисеев Н.Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2, с, 169-174.

37. Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. Сборник статей. М., ВЦ АН СССР, 1962.

38. Рабинович Б.И., Докучаев Л.В., Полякова З.М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 3, вып. 2, с. 179-207.

39. Моисеев Н.Н., Петров А,А. Численные методы расчета, собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., ВЦ АН СССР, 1966.

40. Нариманов Г.С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью. Учет немалости движения последней. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 513-524.

41. Моисеев Н.Н. О математических методах исследования нелинейных колебаний жидкости. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961, т. 3. Киев, Изд—во АН УССР, 1963, с. 275-284.

42. Микишев Г.Н., Дорожкин Н.Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1961,№4, с. 48-53.

43. Микишев Г.Н., Невская Е.А., Мельникова И.М., Дорожкин Н.Я. Об экспериментальном исследовании возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 3, вып. 2, с. 208-220.

44. Cooper R.M. Dynamics of liquids in moving containers. ARS Journal, vol. 30, №8, 1960, p. 725-729.

45. Слезкин Н.А. Динамика вязкой жидкости. — М.: Гостехиздат, 1955.

46. Румянцев Б.Н. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, с. 1127-1132.

47. Кочин Н.Е., Кибель И. А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, тт. I,II — М.: Физматгиз, 1963.

48. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.

49. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром/УМН. 1857, т. 12, вып.5, с. 3-122.

50. Моисеев Н.Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье - Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. I, №3, с. 548-550.

51. Краснощеков П.С. О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 193-202.

52. Краснощеков П. С. Малые колебания твердого тела, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью/В сб.: Численные методы решения задач математической физики — М.: Изд-во Наука, 1966, с. 258-266.

53. Багаева Н.Я., Моисеев Н.Н. Три задачи о колебании вязкой жидкости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, 2, с. 317-326.

54. Шмидт А. Р. Колебания вязкой жидкости конечной глубины, вызванные начальным смещением ее свободной поверхности. Ж. вычисл. матем. и

матем. физ, 1965, т.5, №2, с.287-297.

55. Крушинская С. И. Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т.5, №3, с.519-536.

56. Болотин В. В. О движении жидкости в колеблющемся сосуде. ПММ, 1958, т.20, №2, с.293-294.

57. Викторов Е.Д. Вычисление коэффициента затухания свободных колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1965, №2, с. 143-146.

58. Крейн С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. ДАН СССР, 1964, т. 159, №2, с. 262-265.

59. Иевлева О. Б. Малые колебания маятника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, с. 1132-1134.

60. Иевлева О. Б. О колебаниях тела, наполненного вязкой жидкостью. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1966, №6, с. 27-34.

61. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. Journal of fluid mechanics, 1963, vol.17, part 1, p. 1-20.

62. Greenspan H.P., Howard L.N. On a time dependent motion of a rotating fluid. Journal of fluid mechanics, 1963, vol.17, part 3, p. 385-404.

63. Greenspan H.P. On the transient motion of a contained rotating fluid. Journal of fluid mechanics, 1964, vol. 20, part 4, p. 673-696.

64. Greenspan H.P. On the general theory of contained rotating fluid motions. Journal of fluid mechanics, 1965, vol. 22, part 3, p. 449-462.

65. Stewartson K. On almost rigid rotations. Part 2. Journal of fluid mechanics, 1966, vol.26, part 1, p. 131-144.

66. Bretherton P.P., Carrier G. F., Longuet-Higgins M. S. Report on the I.U.T.A.M. symposium on rotating fluid systems. Journal of fluid mechanics, 1966, vol.26, part 2, p. 393-410.

67. Lighthill M. J. Dynamics of rotating fluids: a survey. Journal of fluid mechanics, 1966, vol.26, part 2, p. 411 —431.

68. Moisseyev N. N. Sur certains problemes mathematiques du mouvement relatif des satellites. Dynamics of satellites. Symposium , Paris, 1962. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen - Heidelberg, 1963, p. 313—335.

69. Беляева М.А., Мышкис А.Д., Тюпцов А.Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механ, и машиностр., 1984, №5, с.39-46.

70. Моийеев Н.Н., Черноусько Ф.Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычисл. матем. и матем.физ., 1965, т.5, №6, с. 1071-1095.

71. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость и пузырь воздуха. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 735-745.

72. Черноусько Ф.Л. Автомодельное движение жидкости под действием поверхностного натяжения. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, с. 54-61.

73. Черноусько Ф.Л. Движение тонкого слоя жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5, с. 856-86,2.

74. Петров В.М., Черноусько Ф.Л. Об определении формы равновесия жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Изв. АН СССР, Механ. жидкости и газа, 1966, №5, с. 152-156.

75. Копачевский Н.Д., Мышкис А. Д. Гидродинамика в слабых силовых полях. О малых колебаниях вязкой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1866, т.6, №8, с. 1054-1063.

78. Ишлинский А.Ю. Деятельность Михаила Алексеевича Лаврентьева в Академии наук УССР. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1960, №3, с. 16-19.

77. Y evtushenko Yu.G., Tchernousko F. L. A-symptotic methods for the solution of some problems of satellite dynamics. XVth International Astronautical Congress, Warszawa, 1964. Proceedings, vol.1. Gauthier-Villars, Paris, PWN, Warszawa, 1965, p. 277-296.

78. Черноусько Ф.Л. О движении тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. Международный Конгресс математиков. Москва, 1966, Тезисы кратких научных сообщений. Секция 12, с. 55.

79. Институт проблем механики АН СССР. Семинары (краткое содержание докладов). Изв. АН СССР, Механика 1965, №6, с. 161.

80. Механико—математический факультет МГУ. Семинары (краткое содержание докладов).Механика твердого тела, 1966, Мв5, с.191-182.

81. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при. малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, №6, с. 1049—1070.

82. Черноусько Ф.Л. Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рзйнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, с. 476-494.

83. Черноусько Ф.Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде. ПММ. 1966, т. 30, вып. 5, с. 836-847.

84. Черноусько Ф.Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 977-992.

85. Черноусько Ф.Л. Колебания сосуда с вязкой жидкостью. Изв. АН СССР, Механ. жидкости и газа, 1.967, №1, с. 58-66.

88. Черноусько Ф.Л. Колебания твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Механика твердого тела, 1967, №1, с.3-14.

87. Черноусько Ф.Л. Вращательные движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3, с. 416-432.

88. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1968, №1, с. 73-79.

89. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т. II , ч. 2, — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951.

80. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости — М.: Физматгиз, 1961.

91. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. —М.: Изд-во АН СССР, 1961.

92. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч.I,II — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.

93. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми — М.: Физматгиз, 1959.

94. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний — М.: Физматгиз, 1963.

95. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. УМН, 1962, т. 17, вып. 6. с. 3-126.

96. Журавский А.М. Справочник до эллиптическим функциям. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1941.

97. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М.: Физматгиз, 1962.

98. Беляков В.М., Кравцова .Р.И, Раппопорт М.Г. Таблицы эллиптических интегралов, т. 1 — М.: Изд—во АН СССР, 1962.

99. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика — М.: Физматгиз, 1058.

100. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс — М.: Наука, 1965.

101. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов, ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474-483.

102. Лойцянски и Л.Г. Гидродинамическая теория сферического подшипника. ПММ, 1955, т. 19, вып. 5, с. 531-540.

103. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц — М.: Наука, 1866.

104. Сретенский Л.Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Труды ЦАГИ, №541, 1941.

10S. Снеддон И. Преобразования Фурье — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.

108. Норден А. П. Теория поверхностей — М.: Гостехиздат, 1956.

107, Люстерник Л.А., Айушский И.Я., Диткин В.А. Таблицы бесселевых функций — М.-Л.Ж Гостехиздат, 1949.

108. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966.

109. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного — М.: Физматгиз, 1958.

110. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление — М.: Физматгиз, 1961.

111. Иевлева О.Б., Крейн С,Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Международный конгресс математиков, Москва, 1966. Тезисы кратких научных сообщений. Секция 12, с.37.

112. Бабич В.М. и др. Линейные уравнения математической физики — М.: Наука, 1964.

113. Смирнов В,И. Курс высшей математики, тт.П, IV — М.: Физматгиз, 1958.

114. Быховский Э. Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 59,. М.-Л., Изд-во АН СССР, I960, с. 5-36.